Міністерство освіти та науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Звіт

до лабораторної роботи №4:

«Інтерполяція»

студента 3 курсу

факультету кібернетики

групи OM-3

Бабієнка Іллі

м. Київ

**Постановка задачі**

*Завдання 1*

Побудувати поліном найкращого середньо-квадратичного наближення для фукнції f(x) на інтервалі [a,b] за системою л.н.з. функцій {φi(x)}, i = 0..n:   
a)  ;  
b) .  
Побудувати графіки функції та отриманих наближень, обчислити похибки.

*Завдання 2*

Побудувати многочлен найкращого середньоквадратичного наближення  для функції f(x) на проміжку [a; b] по її значенням  у вузлах xi = a + ih, i = 0..n, h = (b – a)/n, n >> m. Степінь полінома обрати оптимальну m=m\*, тобто таку, за якої величина  стабілізується (або починає зростати). Побудувати графіки функцій f(x) та отриманого наближення, обчислити відхилення.

*Завдання 3*

Побудувати згладжуючий кубічний сплайн S(x) для функцій f(x) на проміжку [a; b] по її значенням у вузлах xi = a + ih, i = 0..m, h = (b – a)/m. Побудувати графіки функцій f(x) та S(x)

**Теоретична частина**

*Частина 1 (ЕНСКН явно-заданої функції)*

Нехай задана функція f(x) з Гільбертового простору *H* з скалярним добутком (u,v) та скінченна лінійно-незалежна система фукнцій  (яка утворює підпростір  в *H*). Норму та відстань обчислюємо за формулами: .  
Нехай . Він є ЕНСКН, якщо  . (тобто фактично це проекція f на підпростір ).

**Теорема .** існує елемент найкращого наближення, причому множина цих елементів є опуклою.  
**Теорема .** , де – гільбертів простір, існує єдиний елемент найкращого наближення.  
**Теорема 3.** Нехай  – ЕНСКН для ; тоді .  
Отже, якщо – ЕНСКН, то  . (це і необхідні і достатні умови)  
Знайти ЕНСКН означає знайти коефіціенти  . Для цього потрібно розв’язати СЛАР: . Матриця данної системи складається з  (тобто це Грамміан , і оскільки система  – л.н.з, то його визначник , отже розв’язок єдиний). Осклільки , то систему розв’язують методом квадратних коренів.  
Якщо система функції {φi(x)}, i = 0..n ортогональна, тобто , то розв’язком такої системи буде

Якщо система ортонормована, то

Якщо скалярний добуток задано із ваговим множником ρ(x):

В ролі гільбертового простору найчастіше братимемо простір інтегрованих у квадраті функцій H = L2(a, b) зі скалярним добутком .

Для відхилення отриманого наближення від наближуваної функції використаємо

Якщо система функцій ортогональна, то

Якщо ж система функцій ортонормована, то

*Частина 2 (ЕНСКН таблично заданої ф-ції)*

Нехай в результаті вимірювань функції f(x) при x = x1, … , x = xN дістаємо таблицю значень fi(x) = yi, i = 1..N.

За даними цієї таблиці треба побудувати аналітичну формулу:

Ф(x, a0, a1, … , an) = yi, i = 1..N. Тут N >> n.

Середнє квадратичне відхилення функції від системи точок:

S – залежить лише від коефіцієнтів, тобто це функція багатьох параметрів і мінімум досягається при , тоді маємо:

Нехай Ф(xi, a0, a1, … , an) = , тобто залежність лінійна, тоді:

– система умовних рівнянь (СУР).

З теореми про існування та єдиність ЕНСН Ф0 – ЕНСН, то

(f - Ф0, Ф) = 0, Ф Mn, а у нашому випадку:

– СНР для даної СУР

з розмірністю (n + 1)(n + 1).

У цій системі

Для відхилення маємо наступну формулу:

.

ЕНСН задовольняє умову:

*Частина 3*

Згладжуючим кубічним сплайном називається функція g(x), на якій досягається нижня границя функціоналу , тобто , де

Теорема.Функція g(x) є кубічним інтерполяційним сплайном, тобто

g(xi) = S(xi), i = 0..n.

Позначимо , це невідомі, які задовільняють СЛАР:

, де

Тоді найменше значення функціоналу Ф1(u) знаходимо як

, перепишемо дану рівність у наступному вигляді: , де .

Звідси, – СЛАР з 5-діагональною матрицею для знаходження

Тоді .

– шукані значення згладжуючого сплайну у вузлах сітки.

Їх потрібно підставляти замість fi, тоді ми побудуємо згладжуючий сплайн.  
Остаточна ф-ла для наближення (для ):

**Практична частина**

*Варіант -*

Функція , .

*Завдання 1*

Системи функцій:  
a)  ;  
b) .

1) Система функцій {φi(x)} = {xi}, i = 0..5 (не є отрогональною)

В процесі обчислення коефіцієнтів системи потрібна буде програмна інтерпретація скалярного добутку .

На [a, b] має вигляд:

Відхилення:



∆(f) ≈

2) Система функцій . (майже ортогональна)  
В процесі обчислення коефіцієнтів системи потрібна буде програмна інтерпретація скалярного добутку . Проте дана система э ортогональною на проміжку [-π,π]. Тож розглянемо ф-цію  (x ∈ [-π,π]) на цьому проміжку, побудуємо ЕНСКН  для неї, а потім застоувавши обернене перетворення до отриманого наближення, отримаємо наближення початкової ф–ції на інтервалі [-1,1]:  (x ∈ [-1,1]).

Зауваження: дана система фукнцій за виключенням одиниці є ортогональною, до того ж скалярний добуток синусів з 1 рівен 0 (косинусів – ні, це слідує з парності). Щоб прискорити процедуру розв’язання СЛАР, можна окремо розвглянути дві системи:  та  (тут ), (адже довільна функція першої системи ортогональна довільній ф-ції другої). Матриця першої системи вийде діагональною, другої – ні (за вилюченням першого рядка/стовпця).

Відхилення: 0.01689064316754154

Error - integral - [-1, 1]  
|Error| = 0.01689064316754154

Error - integral - [-pi, pi]  
|Error| = 0.029937885526579944

Error - sum - [-pi, pi]  
|Error| = 0.02993788552655487

Графіки функцій f(x) та отриманих наближень та похибок:

*Завдання 2*

Фактично ми повторюємо усі ті ж процедури що і в завданні 1, лише з поправкою що скалярний добуток обчислюється як:  (фактично, дробовим множником можна знехтувати, адже при розв’язку СЛАР він скоротиться)

n0=12, m0=5. Щоб отримати перевагу в обчисленнях при використанні даного методу, необхідно щоб степінь полінома була менше (зачно) за кількість вузлів (). Тому, для пошуку оптимального степеня, в конкретному випадку достатньо обчислити величину  для , та подивитись як вона буде змінюватись:

3 - 0.19404454786207248  
4 - 0.19404454786207279  
5 - 0.19706775745954402  
6 - 0.18849438779810773  
7 - 0.18820545567177127  
8 - 0.18463169108357586  
9 - 0.1841987245268684  
10 - 0.18200354098288685  
11 - 0.1818630322100599  
12 - 0.1805069815005487  
13 - 0.1806211822206276  
14 - 0.1797817302002633  
15 - 0.1800436138490661  
Отже оптимальне значення степеня m\*=14. Система функцій {φi(x)} = {xi}, i = 0..5.

Відхилення: ∆(f) ≈ 0.19049292740569093

Графіки функцій f(x) та отриманих наближень та похибок:

*Завдання 3*

Побудова згладжуючого кубічного сплайну: